Principe des tiroirs

Propriété – Principe des tiroirs.

1. Si on range strictement plus de n chaussettes dans n tiroirs, au moins un des tiroirs contient au moins deux chaussettes.
2. Si on range strictement plus de kn chaussettes dans n tiroirs, au moins un des tiroirs contient au moins $k+1$ chaussettes

Exercice 1 Justifier la deuxième version du principe des tiroirs.

Exemple La population de l'Île-de-France est de $12,40$ millions d'habitants, et un être humain a au plus $600\,000$ cheveux sur la tête. Le quotient fait $\frac{62}{3}$, on peut donc trouver au moins 21 habitants avec exactement le même nombre de cheveux.
En pratique, on peut en trouver beaucoup plus que $21\dots$

Premiers exemples

Exercice 2 Montrer que parmi 10 nombres $x_1, \dots, x_{10}$ appartenant à $[0,1]$, on peut en trouver deux distincts tels que $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{9}$.

Exercice 3 On considère une réunion de n individus. Montrer qu'il existe deux individus qui connaissent exactement le même nombre de personnes dans cette réunion. On suppose que si A connait B, B connait A.

Exercice 4 On considère un carré de côté 1. Montrer que si l'on place 5 points dans ce carré, on peut en trouver deux dont la distance est au plus de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 7 nombres distincts sont choisis parmi $1, 2, \dots, 11$. Montrer qu'il en existe au moins deux dont la somme fasse 12.

Exercice 6 ★ On considère 2024 entiers, non nécessairement distincts, et dont les facteurs premiers sont ≤ 23. Montrer qu'il existe quatre de ces entiers dont le produit est une puissance quatrième.

Arithmétique

Propriété – Division euclidienne. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels vérifiant

$$n = bq + r \text{ et } r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$$

Remarque n est divisible par b si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par b est nul.

Exercice 7 Démontrer l'existence de la propriété précédente.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $a_0, a_1, \dots, a_n$ des entiers distincts.

1. Montrer qu'on peut en trouver deux distincts dont la différence soit divisible par n.
2. On suppose que les a_i appartiennent à $[\![1, 2n]\!]$.
   a) Montrer qu'on peut en trouver deux premiers entre eux.
   b) ★ Montrer qu'on peut en trouver deux distincts tels que l'un divise l'autre.

Exercice 9 Étant donnés $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une somme de termes consécutifs, donc de la forme $x_i + x_{i+1} + \dots + x_j$, qui soit divisible par n.

Exercice 10 Montrer qu'il existe un entier divisible par 27 dont l'écriture décimale ne contient que des 0 et 1.

Combinatoire plus subtile

Exercice 11 Montrer que tout ensemble de 10 nombres distincts entre 1 et 100 contient deux sous-ensembles distincts non vides avec la même somme.

Exercice 12 ★ Un maitre d'échecs joue au moins une partie par jour, mais au plus dix parties par semaine. Montrer que s'il joue assez longtemps, on peut trouver une série de jours consécutifs durant laquelle il a joué exactement 23 parties.

Exercice 13 ★ Soient $n, m \geq 1$. On considère $nm+1$ nombres réels $x_1, \dots, x_{nm+1}$. Montrer l'alternative suivante

- il existe une sous-suite croissante de longueur $m+1$
- il existe une sous-suite décroissante de longueur $n+1$

Approximations rationnelles

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, définie comme le plus grand entier inférieur ou égal à x, et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, définie comme $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 14 Théorème de Dirichlet

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. En considérant les $\{\alpha k\}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, Q\}$, montrer qu'il existe des entiers p, q, avec $1 \leq q \leq Q$ tels que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qQ}$.

   En particulier, si $x \in \mathbb{R}$, *il existe une suite de rationnels* $(\frac{p_n}{q_n})$ *qui converge vers* x *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$.

2. ★ Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*, \ \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^2}$.

   La minoration de l'erreur est du même ordre que la majoration du théorème de Dirichlet : les nombres quadratiques sont mal approximés par des nombres rationnels.